Une généralisation du théorème de Cartwright

Ovide Arino Ahmed Berboucha

Abstract

In this work we first explain a reduced method developed by R.A. Smith, then we apply it to extend a theorem due to M. Cartwright to a class of autonomous retarded functional differential equations. We show, for these equations, that the almost-periodic solutions, when they exist, are quasi-periodic.

Abstract

Dans ce travail nous exposons d'abord une méthode de réduction développée par R.A. Smith, puis nous l'appliquons pour généraliser le théorème de Cartwright à une classe d'équations différentielles fonctionnelles à retard. Nous montrons, pour ces équations, que les solutions presque-périodiques, lorsqu'elles existent, sont quasi-périodiques.

1 Introduction.

Dans le but de généraliser des résultats connus pour les équations différentielles ordinaires à des équations différentielles fonctionnelles à retard, on se propose ici de généraliser un théorème classique dû à M.L. Cartwright [3]. Cet auteur montre que pour une équation différentielle ordinaire autonome de dimension n,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

où f est localement lipschitzienne (voir [2, 3]), toute solution presque-périodique de (1) définie sur $\mathbb{R}$ est quasi-périodique. Elle montre en effet qu'un flot presque-périodique et continu $(\mathcal{O}(x), \varphi)$ peut être étendu à la fermeture de son orbite, qui

Received by the editors February 2002.

Communicated by J. Mawhin.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 34 K 15.

Key words and phrases : Equations différentielles, Solutions réductibles, Solutions presque-périodiques, Solutions quasi-périodiques.

est un ensemble minimal $\mathcal{M} = \mathcal{M}(x)$, de telle sorte que le flot étendu $(\mathcal{M},\varphi)$ soit presque-périodique, avec les mêmes presque-périodes que celles de $(\mathcal{O}(x),\varphi)$. Elle montre ensuite que la dimension topologique de $\mathcal{M}$ est égale à $J \leq n-1$, et que le flot presque-périodique $(\mathcal{M},\varphi)$ a une base rationnelle de J termes. Elle montre enfin en corollaire que si $x(t,x_0)$ est une solution uniformément presque-périodique de l'équation (1) définie sur $\mathbb{R}$, alors elle a une base rationnelle de J termes et si $J = n-1$ alors la base est entière. J. Blot [2], par une approche analytique a redémontré le même résultat, à savoir que toute solution presque-périodique de l'équation (1) définie sur $\mathbb{R}$ est quasi-périodique. J. Mallet-Paret [5] a montré le résultat suivant :

Soit H un espace de Hilbert séparable et T une application de classe C^1 d'un ouvert U de H dans H. Soit Γ un sous ensemble compact de H tel que $\Gamma \subset U$ et tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

i) $T(\Gamma) \supseteq \Gamma$ (Γ est négativement invariant par T)

ii) Il existe un sous espace vectoriel fermé, de codimension finie, C de H tel que $\left\| DT(x)_{/C} \right\| < 1$ pour tout $x \in \Gamma$.

alors la dimension topologique de Γ est finie.

En application de ce résultat (voir [5] th.4.1) il généralise le théorème de Cartwright [3], aux équations différentielles à retard discret de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_N)) \tag{2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^{n(N+1)} \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, bornée sur $\mathbb{R}^{n(N+1)}$ et $\tau_j \in]0,1]$; sont des constantes. Il montre que si x est une solution presque-périodique de (2), alors les exposants de la série de Fourier de x admettent une base rationnelle finie; (i.e il existe un ensemble fini de nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ tels que tout exposant de Fourier λ, de x s'écrit de manière unique sous la forme $\lambda = r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + ... + r_s\lambda_s$ où $r_1, r_2, ...r_s$ sont des nombres rationnels). Cette extension de J. Mallet-Paret couvre pratiquement toutes les équations différentielles fonctionnelles à retard discret mais ne couvre pas les équations à retard continu. Dans le présent papier on va généraliser le théorème de Cartwright à une grande classe d'équations différentielles fonctionnelles à retard continu. Notre attention sera portée sur les équations écrites sous la forme "feed-back contrôle". Dans les démonstrations, on utilise la projection de R.A. Smith, que nous définissons en §2 et pour laquelle nous rappelons certaines propriétés. En §3, après avoir rappelés certains résultats sur les fonctions presque-périodiques, nous en démontrons d'autres nécessaires pour démontrer, en §4, notre résultat principal qui constitue, comme on l'a déjà dit, une généralisation du théorème de Cartwright à des équations à retard continu.

2 Bref exposé de la théorie de réduction de R.A. Smith.

Soit $0 \leq h < \infty$ et $\mathcal{C}$ l'espace de Banach des fonctions continues $\varphi\ : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$, avec $|\varphi| = \sup |\varphi(\theta)|$; $-h \leq \theta \leq 0$. ($|\varphi(\theta)|$ est la norme euclidienne de $\varphi(\theta)$ dans $\mathbb{R}^n$).

Considérons l'équation différentielle fonctionnelle à retard

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \tag{3}$$

où x_t dénote la fonction $x(t+\theta)$ et $f\ : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ satisfait la condition de Lipschitz sur un ouvert $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}, |f(\varphi_1) - f(\varphi_2)| \leq k\, |\varphi_{1-}\varphi_2|$ pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$, k est la constante de Lipschitz.

Notre but est d'étendre le théorème de Cartwright [3] à une grande classe d'équations différentielles fonctionnelles à retard, en l'occurrence les équations écrites sous la forme "feed-back contrôle".

$$\dot{x}(t) = Ax_t + B\Phi(Cx_t) \tag{4}$$

où B est une matrice constante de type $n \times r$, $A\ : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ et $C\ : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^s$ sont des applications linéaires bornées; et la fonction $\Phi\ : C\mathcal{S} \to \mathbb{R}^r$ satisfait la condition de Lipschitz

$$|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| \leq \Omega(C\mathcal{S})\, |y_1 - y_2| \quad \text{pour } y_1,\, y_2 \in C\mathcal{S} \tag{5}$$

(puisque $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ on a $C\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^s$).

Les applications linéaires bornées A et C peuvent être représentées par (voir [6])

$$A\varphi = \int_{-h}^{0} [d\alpha(\theta)]\, \varphi(\theta) \quad , \quad C\varphi = \int_{-h}^{0} [d\gamma(\theta)]\, \varphi(\theta)\ , \tag{6}$$

où $\alpha(\theta)$ et $\gamma(\theta)$ sont des matrices du type $n \times n$ et $s \times n$, respectivement, dont les éléments sont des fonctions à variations bornées sur l'intervalle $[-h, 0]$.

Nous définissons les fonctions

$$a(z) = \int_{-h}^{0} e^{z\theta} d\alpha(\theta) \quad , \quad c(z) = \int_{-h}^{0} e^{z\theta} d\gamma(\theta) \qquad z \in \mathbb{C}\ . \tag{7}$$

Ces fonctions sont analytiques sur $\mathbb{C}$ (voir [6]); et l'équation

$$\det\,[zI - a(z)] = 0 \tag{8}$$

est appelée l'équation caractéristique de A. Elle a seulement un nombre fini de racines dans le demi-plan $Rez \geq \beta$ et ceci pour tout nombre réel β (voir [4] page 181).

Dans la suite nous supposerons que $\lambda > 0$ est une constante satisfaisant l'hypothèse suivante

($\mathbf{H}_1$) *l'équation* (8) *n'admet pas de racines z telles que $Rez = -\lambda$ et admet exactement j racines z telles que $Rez > -\lambda$, j étant un entier positif.*

Ces racines sont comptées avec leur ordre de multiplicité. La matrice

$$\chi(z) = c(z)\,[zI - a(z)]^{-1}\,B \tag{9}$$

est appelée la matrice de transfert de (4). Elle est de type $s \times r$. Lorsque $(\mathbf{H}_1)$ est vérifiée, on définit

$$\mu(\lambda) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\chi(-\lambda - i\omega)| \tag{10}$$

où $|K|$ désigne la norme spectrale d'une matrice rectangulaire quelconque K; ($|K|^2$ est la plus grande valeur propre de la matrice symétrique K^*K où K^* est la matrice adjointe de K).

A l'application linéaire bornée $A\ : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ nous allons associer une application linéaire $\Pi\ : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^j$ où j est l'entier défini dans $(\mathbf{H}_1)$. Pour $j > 0$, les racines $\zeta_1, ..., \zeta_j$ de (8) du demi-plan $Rez > -\lambda$ nous donnent un sous espace j -dimensionnel $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}$, qui a une base $\varphi_1, ..., \varphi_j$ qui consiste en certaines "fonctions propres généralisées" associées à ces racines (voir [4, 6]). L'espace $\mathcal{P}$ a un complémentaire $\mathcal{Q}$ sous- espace de $\mathcal{C}$ et on a $\mathcal{C} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ (somme directe) et donc tout élément φ de $\mathcal{C}$ peut s'écrire

$$\varphi = r_1\varphi_{1+}r_2\varphi_2 + ... + r_j\varphi_j + \varphi_q \tag{11}$$

où $r_1, r_2, ..., r_j$ sont des constantes réelles et $\varphi_q \in \mathcal{Q}$.

En posant

$$\Pi\varphi = \mathrm{col}(r_1, r_2, ..., r_j) \tag{12}$$

on définit une application linéaire $\Pi\ : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^j$. Pour $\nu = 1, 2, ..., j$ les nombres r_ν sont donnés par

$$r_\nu = \psi_\nu(0)\varphi(0) - \int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi_\nu(\xi - \theta)\,[d\alpha(\theta)]\,\varphi(\xi)d\xi \tag{13}$$

où $\alpha(\theta)$ est la matrice $n \times n$ dans (6) et les vecteurs continus $\psi_1(\theta), ..., \psi_j(\theta)$ sont certaines "fonctions propres généralisées" de la forme adjointe de ($\dot{x}(t) = Ax_t$) correspondantes aux racines $\zeta_1, ..., \zeta_j$ (voir [6]). Il s'ensuit de (12) et (13) qu'il existe une constante k_1 telle que

$$|\Pi\varphi| \le k_1\,|\varphi| \ \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{C}\,. \tag{14}$$

Nous discuterons dans ce qui suit quelques propriétés de Π.

On suppose que $\Omega(C\mathcal{S}) < \mu(\lambda)^{-1}$, les symboles $k_1, k_2, ...$, sont des constantes qui dépendent de A, B, C, λ et $\Omega(C\mathcal{S})$.

Les trois lemmes suivants sont dûs à R.A. Smith [6, 7].

Lemme 2.1. *Il existe des constantes k_2,k_3,k_4,k_5,k_6 positives telles que*

$$\int_{\sigma}^{\tau} \left| \frac{d}{dt}\left\{ e^{2\lambda t}\,|x(t) - y(t)|^2 \right\} \right| dt \le k_2 \int_{\sigma-h}^{\tau} e^{2\lambda t}\,|x(t) - y(t)|^2\,dt \tag{15}$$

$$\left[\int_{\sigma}^{\tau} e^{2\lambda t}\,|x(t) - y(t)|^2\,dt \right]^{\frac{1}{2}} \le k_3 e^{\lambda\sigma}\,|x_\sigma - y_\sigma| + k_4 e^{\lambda\tau}\,|\Pi(x_\tau - y_\tau)| \tag{16}$$

$$|x_\tau - y_\tau| \le k_5 e^{\lambda(\sigma-\tau)}\,|x_\sigma - y_\sigma| + k_6\,|\Pi(x_\tau - y_\tau)| \tag{17}$$

pour tout $\sigma < \tau$ et toutes solutions x et y de (4) *telles que $x_t, y_t \in \mathcal{S}$ sur $\sigma \le t \le \tau$.*

Une solution x de l'équation (4) est dite "réductible" si $x_t \in \mathcal{S}$ pour $-\infty < t \leq \tau$ et $\int_{-\infty}^{\tau} e^{2\lambda t} |x(t)|^2 \, dt$ converge. En particulier si une solution x_t dans $\mathcal{S}$ est bornée sur $]-\infty, \tau]$, alors elle est réductible, car $\lambda > 0$. Par conséquent toute solution périodique x_t dans $\mathcal{S}$ est réductible.

Lemme 2.2. *Si x et y sont des solutions réductibles de* (4) *sur* $]-\infty, \tau]$ *alors*

$$e^{\lambda\sigma} |x(\sigma) - y(\sigma)| \to 0 \quad qd \ \sigma \to -\infty \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{2\lambda t} |x(t) - y(t)|^2 \, dt \leq k_4^2 e^{2\lambda\tau} |\Pi(x_\tau - y_\tau))|^2 \tag{19}$$

$$(k_6)^{-1} |x_\tau - y_\tau| \leq |\Pi(x_\tau - y_\tau)| \leq k_1 |x_\tau - y_\tau| \ . \tag{20}$$

En particulier, (19) *montre que si* $\Pi x_\tau = \Pi y_\tau$ *alors* $x(t) = y(t)$ *pour* $-\infty < t \leq \tau$.

Lemme 2.3. *Si x et y sont des solutions réductibles de* (4) *sur* $]-\infty, \tau]$ *alors*

$$e^{\lambda\sigma} |x_\sigma - y_\sigma| \leq k_7 e^{\lambda\tau} |x_\tau - y_\tau| \qquad \textit{pour tout } \sigma \leq \tau \tag{21}$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{2\lambda t} |\dot{x}\,(t)|^2 \, dt \leq k_4^2 e^{2\lambda\tau} |\Pi \dot{x}_\tau|^2 \tag{22}$$

où $\dot{x}_\tau$ dénote la fonction $\dot{x}(\tau + \theta)$ dans $\mathcal{C}$.

Définition 2.4. *[7] Une orbite réductible de* (4) *est la courbe dans $\mathcal{S}$ d'une solution réductible x_t.*

Si x_t est une solution réductible et si η est une constante réelle quelconque alors $x_{t+\eta}$ est aussi une solution réductible et elle décrit la même orbite réductible que x_t.

L'ensemble "réductible" $\mathcal{A}$ de (4) est défini comme étant l'union de toutes les orbites réductibles dans $\mathcal{S}$.

Si $E \subset \mathcal{S}$ est un ensemble borné invariant alors toute orbite se trouvant dans E est réductible et donc $E \subset \mathcal{A}$.

En particulier $\mathcal{A}$ contient toute trajectoire périodique dans $\mathcal{S}$ et tout point singulier dans $\mathcal{S}$.

Si $p \in \mathcal{A}$ et $q \in \mathcal{A}$ alors $p = x_\tau$; $q = y_\tau$ pour des solutions réductibles x_t, y_t qui restent dans $\mathcal{S}$ pour $t \in]-\infty, \tau]$, et de (20) on obtient

$$(k_6)^{-1} |p - q| \leq |\Pi p - \Pi q| \leq k_1 |p - q| \ \text{ pour tout } p, q \in \mathcal{A}. \tag{23}$$

La restriction de l'application Π à $\mathcal{A}$, $\Pi \ : \mathcal{A} \to \Pi\mathcal{A}$ est par conséquent bijective.

Si son inverse est $\Psi \ : \Pi\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ alors

$$(k_1)^{-1} |\zeta - \xi| \leq |\Psi(\zeta) - \Psi(\xi)| \leq k_6 |\zeta - \xi| \ \text{ pour tout } \zeta, \xi \in \Pi\mathcal{A}. \tag{24}$$

$\mathcal{A}$ est donc homéomorphe à $\Pi\mathcal{A}$.

Il s'ensuit que si Γ et Υ sont deux trajectoires réductibles distinctes alors les courbes $\Pi\Gamma$ et $\Pi\Upsilon$ sont disjointes.

Si $\zeta \in \Pi\mathcal{A}$ alors $\Psi(\zeta) = x_\tau$ pour une unique solution réductible x_t qui reste dans $\mathcal{S}$ sur $]-\infty, \tau]$. En définissant $g(\zeta) = \Pi \dot{x}_\tau$, on obtient une fonction $g \ : \Pi\mathcal{A} \to \mathbb{R}^j$.

Puisque $\Pi\dot{x}_t$ est la dérivée de Πx_t, la fonction Πx_t est une solution de l'équation j-dimensionnelle

$$\frac{d\zeta}{dt} = g(\zeta) \tag{25}$$

pour toute solution réductible x_t de (4).

La fonction $g(\zeta)$ est lipschitzienne dans $\Pi\mathcal{A}$ (voir[7])

$$|g(\zeta) - g(\xi)| \leq k_8 |\zeta - \xi| \text{ pour tout } \zeta, \xi \in \Pi\mathcal{A} \tag{26}$$

De plus, on a le lemme suivant (voir [7] page 221)

Lemme 2.5. *Si $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^\nu$ et $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ satisfait*

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq k |x - y| \text{ pour tout } x, y \in \mathcal{B} \tag{27}$$

alors il existe $\hat{\mu} : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ qui vérifie (27) *pour tout $x, y \in \mathbb{R}^\nu$ et vérifie $\hat{\mu}(b) = \mu(b)$ pour tout $b \in \mathcal{B}$.*

Ecrivons à présent $g(\zeta) = (g_1(\zeta), g_2(\zeta), ..., g_j(\zeta))$.

Alors les fonctions $g_1, g_2, ..., g_j$ satisfont la condition de Lipschitz (26) sur $\Pi\mathcal{A}$ et le lemme 2.5 nous permet d'affirmer qu'il existe des fonctions $\hat{g}_1, \hat{g}_2, ..., \hat{g}_j$ qui satisfont la même condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}^j$ et qui coïncident avec $g_1, g_2, ..., g_j$ sur $\Pi\mathcal{A}$. Si on pose

$$\hat{g}(\zeta) = (\hat{g}_1(\zeta), \hat{g}_2(\zeta), ..., \hat{g}_j(\zeta)) \tag{28}$$

alors l'équation différentielle

$$\frac{d\zeta}{dt} = \hat{g}(\zeta) \tag{29}$$

est une extension de l'équation (25), et pour laquelle la fonction $\hat{g}(\zeta)$ est lipschitzienne sur tout $\mathbb{R}^j$. Il est clair que si x est une solution réductible de (4) sur $]-\infty, \tau]$ alors Πx_t est l'unique solution ζ de (25) telle que $\zeta(\tau) = \Pi x_\tau$. On a alors

$$\zeta(t) = \Pi x_t \quad , \quad x_t = \Psi(\zeta(t)) \tag{30}$$

qui nous donne une correspondance biunivoque entre les solutions réductibles x de (4) et les solutions ζ de (25) définies dans $\Pi\mathcal{A}$.

La condition $\Omega(C\mathcal{S}) < \mu(\lambda)^{-1}$ est la seule restriction que nous imposons à l'équation (4). C'est une condition suffisante pour obtenir les résultats des lemmes 2.1, 2.2 et 2.3 dont les inégalités et notamment l'inégalité (20), nous permettent d'obtenir une bijection entre les solutions réductibles de l'équation (4) et les solutions de l'équation différentielle ordinaire (25) qui lui est associée par la projection Π. Cette condition stipule que la partie non linéaire du second membre de l'équation (4) doit être lipschitzienne avec une constante de Lipschitz majorée par $\mu(\lambda)^{-1}$; en particulier si Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et J_y est la matrice jacobienne de Φ en $y \in C\mathcal{S}$, alors on doit avoir $|J_y| \leq \Omega(C\mathcal{S}) < \mu(\lambda)^{-1}$.

3 Rappels sur les fonctions presque-périodiques et les fonctions quasi-périodiques.

Soit X un espace de Banach, et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans X. On notera $Im(f) := \{x = f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; et $|x|$ la norme d'un point $x \in X$.

Rappelons qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un nombre $l > 0$ (longueur d'inclusion) tel que tout intervalle $[a, a+l]$, $a \in \mathbb{R}$, contienne au moins un point de E.

Définition 3.1. *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to X$ est dite presque-périodique si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un ensemble relativement dense $\{\tau\}_\varepsilon$ tel que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon \ , \ \forall \tau \in \{\tau\}_\varepsilon . \tag{31}$$

Chaque élément $\tau \in \{\tau\}_\varepsilon$ est appelé une presque-période de f; à l'ensemble $\{\tau\}_\varepsilon$ correspond une longueur d'inclusion l_ε.

Voici à présent quelques propriétés des fonctions presque-périodiques voir [1, 2].

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{\tau\}_\varepsilon$ est fermé.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{l'\}_\varepsilon$ des longueurs d'inclusion correspondantes a un minimum l_ε.

Soit $f : \mathbb{R} \to X$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach X.

Si f est presque-périodique alors f est uniformément continue.

Si f est presque-périodique alors $Im(f)$ est relativement compacte.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions presque-périodiques qui convergent uniformément vers une fonction f, alors f est presque-périodique, et par conséquent l'ensemble des fonctions presque-périodiques est fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

Si f est presque-périodique et $f^{'}$ est uniformément continue alors $f^{'}$ est presque-périodique (f' désigne la fonction dérivée de f).

La somme $f+g$ de deux fonctions presque-périodiques est une fonction presque-périodique.

Le produit $\varphi.f$ d'une fonction presque-périodique f, définie de $\mathbb{R}$ dans X, par une fonction numérique φ presque-périodique est une fonction presque-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans X.

Théorème 3.2. *Soit X et Y deux espaces de Banach $f : \mathbb{R} \to X$ une fonction presque-périodique et $g : X \to Y$ une application continue sur $\overline{Im(f)}$ alors $g \circ f$ est une fonction presque-périodique.*

Preuve : [1] Observons d'abord que $g \circ f$ est continue, en outre g est uniformément continue sur le compact $\overline{Im(f)} = G$. Alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \ tq \ \forall x', x'' \in G$,

$\|x'' - x'\| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|g(x'') - g(x')\| \leq \varepsilon$.

Soit maintenant τ une δ_ε-presque-période de f. Alors

$\forall t, \|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \delta_\varepsilon$ et par conséquent en posant

$x'' = f(t+\tau)$, $x' = f(t)$ on obtient

$$\|g(f(t+\tau)) - g(f(t))\| \leq \varepsilon \tag{32}$$

et τ est une ε-presque-période de $g \circ f$. ∎

Observons que $\forall a \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction $ae^{i\lambda t}$ est périodique, il s'ensuit que tout polynôme trigonométrique

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}, a_k \in X, \lambda_k \in \mathbb{R} \tag{33}$$

est presque-périodique et par conséquent, toute fonction f qui est limite, pour la convergence uniforme, d'une suite de polynômes trigonométriques est presque-périodique.

Si une fonction $f\ :\mathbb{R} \to X$ est presque-périodique alors il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un polynôme trigonométrique

$$P_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\lambda_k t} \tag{34}$$

tel que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - P_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon. \tag{35}$$

Toute fonction presque-périodique $x = f(t)$, possède une moyenne temporelle

$$M(x) = M(f(t)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)dt. \tag{36}$$

Les fonctions presque-périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach X sont représentables par des familles sommables d'exponentielles complexes dotées de coefficients vectoriels de Fourier-Bohr;

$$a(\lambda, f(t))\ := M(f(t)e^{-i\lambda t}) \in X \tag{37}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f\ :\mathbb{R} \to X$ est presque-périodique, et l'on écrit

$$f(t) \sim \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a(\lambda, f(t))e^{i\lambda t} \tag{38}$$

on a en outre l'égalité de Parseval

$$M(|f(t)|^2) = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |a(\lambda, f(t)|^2\,. \tag{39}$$

Pour une fonction presque-périodique f définie de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach X, on pose $\Lambda(f)\ := \{\lambda \in \mathbb{R}\ /a(\lambda, f(t)) \neq 0\}$, l'égalité de Parseval qui assure la sommabilité de la famille $(|a(\lambda, f(t)|^2)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ induit que $\Lambda(f)$ est au plus dénombrable.

$$Mod(f)\ := \left\{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \lambda_\nu / n \in \mathbb{N}, k_\nu \in \mathbb{Z}, \lambda_\nu \in \Lambda(f)\right\} \tag{40}$$

est appelé le module des fréquences de f, c'est le $\mathbb{Z}$ -module (ou le groupe abélien) engendré par $\Lambda(f)$.

Lorsque $Mod(f)$ est un module libre de type fini on dit que f est quasi-périodique.

Proposition 3.3. *Si g est une fonction presque-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$, et $f \in \mathcal{C}^0(\overline{Im(g)}, \mathbb{R}^m)$. Alors $f \circ g$ est une fonction presque-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ et $Mod(f \circ g) \subset Mod(g)$.*

Preuve : La fonction $f \circ g$ est presque-périodique et définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$, est un résultat classique (voir théorème 3.2).

Montrons alors que $Mod(f \circ g) \subset Mod(g)$.

Soit $\mathcal{K}$ l'enveloppe convexe fermée de $Im(g)$. Si f est continue sur $\overline{Im(g)}$, elle se prolonge en une application continue sur $\mathcal{K}$, et par conséquent se prolonge en une application continue sur $\mathbb{R}^d$. En particulier f a un prolongement continu à un pavé P fermé contenant $\mathcal{K}$. La fonction f est limite uniforme sur P d'une suite de polynômes Q_j. Pour un polynôme quelconque Q on a, $\Lambda(Q \circ g) \subset \Lambda(g)$ donc $Mod(Q \circ g) \subset Mod(g)$ ce qui prouve que pour tout $\lambda \notin Mod(g)$ on a, $a(\lambda, Q \circ g) = 0$ et par continuité on a donc pour tout $\lambda \notin Mod(g)$, $a(\lambda, f \circ g) = 0$ et donc $Mod(f \circ g) \subset Mod(g)$. ∎

Remarque 3.4. *Dans la proposition 3.3 on peut remplacer $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^m$ par $\mathbb{C}^d$ et $\mathbb{C}^m$ où $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes.*

Dans ce qui suit nous généralisons le résultat de la proposition 3.3 au cas où $f \in \mathcal{C}^0(\overline{Im(g)}, X)$ où X est un espace de Banach quelconque. Nous n'avons pas rencontré ce résultat dans la littérature et comme nous allons l'utiliser dans la suite, on a estimé nécessaire d'en donner une démonstration.

Proposition 3.5. *Si g est une fonction presque-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^0(\overline{Im(g)}, X)$ où X est un espace de Banach de dimension quelconque, alors $f \circ g$ est une fonction presque-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans X et $Mod(f \circ g) \subset Mod(g)$.*

Preuve : La fonction $f \circ g$ est presque-périodique et définie de $\mathbb{R}$ dans X (voir théorème 3.2).

Il reste à montrer que $Mod(f \circ g) \subset Mod(g)$. Soit L un élément quelconque de X^* (où X^* désigne le dual de X), on a en remplaçant dans la proposition 3.3 f par $L \circ f$; $L \circ f \circ g$ est une fonction numérique presque-périodique et $Mod(L \circ f \circ g) \subset Mod(g)$.

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (L \circ f \circ g)(t) e^{-i\lambda t} dt = L(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f \circ g)(t) e^{-i\lambda t} dt). \tag{41}$$

En passant à la limite on obtient

$$a(L \circ f \circ g, \lambda) = L(a(f \circ g, \lambda) \tag{42}$$

$$a(L \circ f \circ g, \lambda) = 0, \forall L \in X^* \Leftrightarrow a(f \circ g, \lambda) = 0. \tag{43}$$

Si $\lambda \in Mod(f \circ g)$ alors $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \lambda_i$ où $k_i \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_i \in \Lambda(f \circ g)$.

Si $\lambda_i \in \Lambda(f \circ g)$ alors $a(f \circ g, \lambda_i) \neq 0$ et $\exists L_j \in X^* tq\ L_j(a(f \circ g, \lambda_i) \neq 0$ et donc $\lambda_i \in \Lambda(L_j \circ f \circ g)$ et par conséquent

$\lambda_i \in Mod(L_j \circ f \circ g) \subset Mod(g)$; donc $\forall i = 1, 2, ...n$; $\lambda_i \in Mod(g)$ et par suite $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \lambda_i \in Mod(g)$ et

$$Mod(f \circ g) \subset Mod(g). \tag{44}$$

∎

4 Résultat principal.

Dans ce chapitre nous montrerons, moyennant des hypothèses assez générales, que les solutions presque-périodiques de certaines équations différentielles fonctionnelles à retard sont quasi-périodiques.

Théorème 4.1. *Supposons que pour l'équation* (4)*, il existe un réel* $\lambda > 0$ *et un entier* $j > 0$ *tel que* $(\mathbf{H}_1)$ *soit vérifiée et que* (5) *soit vérifiée avec* $\Omega(C\mathcal{S}) < \mu(\lambda)^{-1}$*. Alors toute solution presque-périodique de l'équation* (4)*, définie sur* $\mathbb{R}$*, est quasi-périodique.*

Preuve : Les hypothèses imposées à l'équation (4) nous assurent qu'il existe une correspondance biunivoque entre les solutions réductibles de l'équation (4) et les solutions de l'équation différentielle ordinaire (25) et cette correspondance vérifie (30). Soit x une solution presque-périodique de l'équation (4), définie sur $\mathbb{R}$. Celle ci est donc bornée et par conséquent elle est réductible. La fonction ζ définie par $\zeta(t) = \Pi x_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, est une solution de l'équation (25), définie sur $\mathbb{R}$. Comme $\Pi\ : \mathcal{A} \to \Pi\mathcal{A}$ est continue, on a (voir proposition 3.3) Πx_t est presque-périodique et donc quasi-périodique, puisque c'est la solution d'une équation différentielle ordinaire autonome en dimension finie, (voir[2, 3]). L'application réciproque Ψ, de Π, définie de $\Pi\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^j$ dans $\mathcal{A}$ est continue; et à la solution quasi-périodique ζ de l'équation (25) elle associe la solution presque-périodique x de l'équation (4), de plus (voir proposition 3.5) cette solution vérifie la relation $x_t{=}(\Psi \circ \zeta)\,(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et est telle que $Mod(x) \subset Mod(\zeta)$ et comme la fonction ζ est quasi-périodique, elle admet un module de type fini, il s'en suit que la solution x de l'équation (4) admet aussi un module de type fini et est donc quasi-périodique. ∎

Corollaire 4.2. *Soit, avec les mêmes notations que dans* (4)*,*

$$\dot{x}(t) = Ax_t \tag{45}$$

une équation différentielle fonctionnelle à retard, linéaire et autonome. Alors toute solution presque-périodique de (45)*, définie sur* $\mathbb{R}$*, est quasi-périodique.*

Preuve : L'équation (45) est un cas particulier de l'équation (4), avec $\Phi(y) \equiv 0$. On a donc $\Omega(C\mathcal{S}) = 0$ et par conséquent pour tout $\lambda > 0$, $\Omega(C\mathcal{S}) < \mu(\lambda)^{-1}$. D'autre part, pour tout réel $\beta > 0$, le nombre de racines de l'équation (8) dans le demi-plan $Rez \geq \beta$ est fini; donc on peut toujours choisir $\lambda > 0$ tel que $(\mathbf{H}_1)$ soit vérifiée avec un entier $j > 0$ quelconque; ainsi les hypothèses du théorème 4.1 sont vérifiées et entraînent le résultat. ∎

References

[1] L. Amerio and G. Prouse, *Almost-periodic functions and functional equations.* Van Nostrand, N.Y. 1971.

[2] J. Blot, *Une approche variationnelle des orbites quasi-périodiques des systèmes Hamiltoniens.* Ann. sc. math. Quebec, 13 (2) pp 7-32, 1989.

[3] M.L. Cartwright, *Almost-periodic flows and solutions of differential equations.* Proc. London Math.Soc. (3) 17 pp 355-380 (1967).

[4] J.K. Hale, *Theory of functional differential equations* . Springer, N.Y. 1977.

[5] J. Mallet-Paret, *Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright.* Journal of differential equations 22. pp 331-348 (1976).

[6] R.A. Smith, *Convergence theorems for periodic retarded functional differential equations.* Proc. London Math. Soc. (3) 60 pp 581-608 (1990).

[7] R.A. Smith, *Poincaré-Bendixson theory for certain retarded functional differential equations.* Differential and Integral Equations. Vol. 5 Number 1. pp 213-240. January 1992.

Ovide Arino
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université de Pau - France.

Ahmed Berboucha
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université A. MIRA de Béjaia - Algérie.