ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Intégration asymptotique de systèmes différentiels fonctionnels asymptotiquement autonomes.* Note (*) de **Ovide Arino** et **Istvan Györi**, présentée par Gustave Choquet.

A partir de théorèmes de perturbation généraux, nous déduisons un certain nombre de résultats classiques concernant le comportement asymptotique de systèmes différentiels retardés asymptotiquement autonomes. Nous étendons également à de tels systèmes un résultat d'intégration asymptotique établi antérieurement par P. Hartman pour des systèmes ordinaires.

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. — Asymptotic Integration of Functional Differential Systems Asymptotically Autonomous.

A number of classical results concerning the asymptotic behaviour of retarded differential systems which are asymptotically autonomous are deduced from general perturbation theorems. We also extend to such systems a result of asymptotic integration previously proved by P. Hartman for ordinary systems.

PRÉSENTATION. — Le système différentiel (L) : $dx/dt = A(t).x(t)$, dans lequel $A(t) \to A_\infty$ si $t \to +\infty$, est une perturbation du système autonome (L_∞) : $dx/dt = A_\infty . x(t)$. On peut espérer que si la perturbation est suffisamment petite les propriétés du système (L) seront proches de celles de (L_∞) et — en particulier — que le comportement asymptotique des solutions de (L) sera essentiellement déterminé par celui de (L_∞).

Des résultats de ce type ont été obtenus notamment par P. Hartman et A. Wintner [5]. Ils sont répertoriés sous le terme d'intégration asymptotique.

Pour les systèmes différentiels retardés ou fonctionnels, le même problème se pose. Il se complique du fait de la nature du retard, de la manière dont intervient la dépendance en t. Ainsi les équations :

(1) $$\frac{dx}{dt} = p(t)(x(t) - x(t-r)), \qquad \text{où } r \text{ est fixé et } p(t) \to 0,\ t \to \infty,$$

(2) $$\frac{dx}{dt} = a.x(t - r(t)), \qquad \text{où } r(t) \to r_\infty,\ t \to \infty,$$

présentent des difficultés et également des avantages sélectifs.

Ces équations ont été étudiées séparément et les résultats obtenus sur chacune, font jouer des propriétés apparemment spécifiques ([1], [4]).

Dans le travail présenté ici, nous avons cherché à unifier ces résultats et à les faire apparaître comme applications de théorèmes de perturbation généraux.

Dans la suite de cette Note, nous énonçons deux théorèmes de perturbation pour des systèmes différentiels à retard et comme corollaires quelques uns des résultats qui sont attachés à chacun d'eux.

Les démonstrations et d'autres résultats sont développés dans une rédaction annexe :

Notations et hypothèses de base. — L'équation générale étudiée s'écrit :

(E) $$\frac{dx}{dt} = F(t, x_t), \qquad t \geqq t_0;$$

où $F : [t_0, +\infty) \times C_n \to \mathbb{R}^n$; n est la dimension de l'espace des x; $C_n = C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, r est un nombre positif (le retard maximum); x_t est la translatée sur $[-r, 0]$ de $x/[t-r, t]$.

F est supposée continue, ce qui assure pour toute donnée φ dans C_n, l'existence d'une solution x définie sur $[t_0 - r, t_0 + a)$, continue sur son domaine, dérivable sur $[t_0, t_0 + a)$ et telle que : $x_{t_0} = \varphi$.

THÉORÈME A. — *On suppose que* F *se décompose en une somme :* $F(t, \varphi)=B(t, \varphi)+P(t, \varphi)$, *où* B *et* P *vérifient les propriétés précédentes et :* (H_B) : $B(t, c)=0$, $c \in \mathbb{R}^n$ (*nullité sur les constantes*) *et il existe une fonction* $b(t, s) \geqq 0$ *telle que :* $\limsup_{t \to +\infty} \int_{-r}^{0} b(t-s, s)\, ds<1$ *et telle que pour toutes* φ, ψ *dans* C_n, *avec* φ, ψ *absolument continues, on ait :*

$$|B(t, \varphi)-B(t, \psi)| \leqq \int^0 b(t, s)\left|\frac{d}{ds}\varphi(s)-\frac{d\psi}{ds}(s)\right| ds;$$

(H_P) : *il existe* $p(.) \geqq 0$, *dans* $L^1(t_0, +\infty)$, *telle que, pour toutes* φ, ψ *dans* C_n *on ait*

$$|P(t, \varphi)-P(t, \psi)| \leqq p(t).|\varphi-\psi|_{C_n}.$$

De plus : $P(t, 0)$ *est dans* L^1.

Sous ces hypothèses, si x est une solution de (E), alors : $\lim_{t \to +\infty} x(t)$ existe. De plus, le système est complet, i. e. : pour tout $c \in \mathbb{R}^n$, il existe x, solution de (E), telle que $\lim_{t \to \infty} x(t)=c$.

REMARQUE A_1. — Cet énoncé n'est pas le plus général possible. L'hypothèse (H_B) pourrait être affinée en utilisant une condition donnée dans [1]. Le théorème A étend notamment des résultats de Svec [6], I. Györi [3]. Il s'applique trivialement à l'équation (1).

COROLLAIRE A_1. — *On suppose que* (E) *s'écrit :* $dx/dt=\sum_{i=1}^{k} P_i(t, x_t)$ *où chaque* P_i *vérifie une condition du typr* (H_p) *avec* $p_i(.)$ *dans* L^{q_i}, $1 \leqq q_i \leqq 2$; *et si* $q_i>1$, $P_i(t, c)=0$, $c \in \mathbb{R}^n$; *de plus* $\sum P_i(t, 0) \in L^1$. *Alors, on a les conclusions du théorème* A.

L'application aux équations du type (2) nécessite des transformations préalables : le problème posé ici est en fait celui de trouver des solutions de type exponentiel pour des systèmes asymptotiquement autonomes.

COROLLAIRE A_2. — *On considère l'équation scalaire :*

$$(E) : \frac{dx}{dt}=ax(t-r(t)),$$

où $r(t)=\omega_0+\omega_1(t)$, $\omega_1(t) \to 0$, $t \to \infty$ *et l'on suppose de plus :*

(i) *que l'équation caractéristique* $\lambda-a.e^{-\lambda\omega_0}=0$ *a une racine réelle* λ_0 *telle que :* $\omega_0.|a|e^{-\lambda_0\omega_0}<1$;

(ii) *que* $\omega_1(.)$ *est dans* L^2.

Alors, il existe une fonction $\lambda(t)=\lambda_0+\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \to 0$, $t \to +\infty$ telle que si x est une solution de (E) on ait :

$$\lim_{t \to \infty}\left[\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(s)\, ds\right)\right].x(t) \text{ existe.}$$

Cette limite est non nulle en dehors d'un sous-espace vectoriel fermé de codimension 1 de l'espace des données.

Si ω_1 est absolument continue, et si sa dérivée est dans L^p, avec $1 \leqq p<2$, alors :

$$\varepsilon(t)=-\frac{\lambda_0^2}{1+\lambda_0\omega_0}\omega_1(t)+h(t), \quad h(.) \in L^p.$$

THÉORÈME B. — *On suppose que le système* (E) *se décompose ainsi*

$$(\mathrm{E})\left\{\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mathrm{L}(t, x_t)+\mathrm{M}(t, y_t),\\ \frac{dy}{dt}&=\mathrm{P}(t, x_t)+\mathrm{Q}(t, y_t),\end{aligned}\right.$$

où $\mathrm{L}(t, .)$, $\mathrm{M}(t, .)$, $\mathrm{P}(t, .)$, $\mathrm{Q}(t,$ *sont linéaires, avec*

$$\mathrm{L}(\text{resp. P}) : [t_0, +\infty)\times \mathrm{C}_n \to \mathbb{R}^n(\text{resp. } \mathbb{R}^m),$$
$$\mathrm{M}(\text{resp. Q}) : [t_0, +\infty)\times \mathrm{C}_m \to \mathbb{R}^n(\text{resp. } \mathbb{R}^m),$$
$$|\mathrm{M}(t, .)|=m(t), \qquad |\mathrm{P}(t, .)|=p(t), \qquad m, p\in \mathrm{L}^2;$$

de plus le système (L) : $dx/dt=\mathrm{L}(t, x_t)$ *est stable; et le système* (Q) : $dy/dt=\mathrm{Q}(t, y_t)$ *est exponentiellement stable.*

Soit (x, y) une solution de (E). Alors : x est borné et $y(t)\to 0$, $t\to\infty$.

Si de plus les solutions de (L) convergent, il en est de même des solutions de (E).

REMARQUE B. — (i) au lieu de supposer (L) stable, on peut faire une hypothèse sur la croissance asymptotique de $|\mathrm{L}(t, .)|$; (ii) au lieu de m, p dans L^2, on peut supposer $m\in \mathrm{L}^k$, $p\in \mathrm{L}^{k'}$, $(1/k)+(1/k)=1$.

En fait, la démonstration du théorème B ne présente pas de difficultés particulières. Pourtant, ce théorème a une certaine efficacité puisque — moyennant des transformations — il nous permet, en particulier, de démontrer une conjecture énoncée dans [4] :

COROLLAIRE B. — *On considère le système* (L_Λ) : $dx/dt=\Lambda x(t)+\mathrm{L}(t, x_t)$, *où* Λ *est une matrice diagonale à coefficients* 2 *à* 2 *distincts*, $\mathrm{L}(t, .)$ *est linéaire et* $|\mathrm{L}(t, .)|=l(t)$ *est dans* L^2.

Alors, il existe une fonction matricielle $\mathrm{F}(t)=(\mathrm{F}_{ij}(t))$, où $\mathrm{F}_{ij}(t) : \mathrm{C}_n([t_0-r, t])\to\mathbb{R}$, est linéaire, continue et telle que :

$$|\mathrm{F}(t)|_{\mathrm{C}_n([t_0-r, t])}\to 0, \ t\to\infty,$$

et pour toute solution x de (L_Λ), il existe c dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\theta(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\theta(t)\to 0$, $t\to\infty$ tels que :

$$x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\Lambda(s)\,ds\right).(c+\theta(t))+\mathrm{F}(t).\exp\left(\int_{t_0}^{t}\Lambda(s)\,ds\right).(c+\theta(.)),$$

où $\Lambda(t)=\Lambda+\mathrm{diag}\{\mathrm{L}(t, \exp(\Lambda.))\}$

(*) Remise le 28 juin 1982.

[1] ATKINSON et HADDOCK, *Critère de convergence asymptotique des solutions d'équations différentielles fonctionnelles* (preprint), 1981.

[2] K. L. COOKE, *J. Math. Anal. Applicat.*, 19, 1967, p. 160-173.

[3] I. GYÖRI, *Col. Math. Soc. J. Bolyai.*, 30, *Qualit. Theory of Diff. Eq.*, 1979.

[4] J. R. HADDOCK et R. SACKER, *J. Math. An. Appl.*, 76, 1980, p. 323-338.

[5] P. HARTMAN et A. WINTNER, *Amer. J. Math.*, 77, 1955, p. 45-86.

[6] M. SVEC, *Bull. U.M.I.*, (4), 11, Suppl. Fasc. 3, 1975, p. 467-477.

O. A. : *Faculté des Sciences, avenue L. Sallenave*, 64000 *Pau*;

I. G. : *Szeged University, Medical School, Pecsi u.4/a*, 6720 *Szeged, Hongrie.*