ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Solutions périodiques d'équations différentielles à argument retardé. Oscillations autour d'un point stationnaire, conditions suffisantes de non-existence.* Note (*) de MM. **Ovide Arino** et **Pierre Séguier**, présentée par M. Jacques-Louis Lions.

Faisant suite à un travail sur les équations différentielles avec retard (2), les auteurs présentent ici des résultats de non-existence de solution périodique en utilisant essentiellement des propriétés de monotonie. Une comparaison est ensuite établie avec des résultats obtenus par d'autres méthodes.

Following a Note by P. Séguier, the authors give some results on the non existence of a nontrivial periodic solution to differential equations with delay, using mainly properties of monotony. A comparison is then made with results involving other methods.

1. DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES. — Soit $f : (t, u, v) \to f(t, u, v)$ une application continue de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. Pour x_0 donnée dans $C_+^0([-\omega, 0])$, ensemble des fonctions continues positives définies sur $[-\omega, 0]$ (ω réel strictement positif), on pose

$$(\mathrm{P}_0)\quad x'(t) = f(t, x(t), x(t-\omega)) \text{ pour } t > 0, \qquad \text{et} \qquad x(t) = x_0(t) \text{ pour } t \in [-\omega, 0].$$

Une application x de $[-\omega, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, est solution de (P_0) pour la donnée initiale épaisse x_0 si elle vérifie :

1° $x \in C^1([0, +\infty[)$;

2° $x(t) = x_0(t)$, $\forall t \in [-\omega, 0]$;

3° $x'(t) = f(t, x(t), x(t-\omega))$, $\forall t > 0$.

HYPOTHÈSES SUR f :

(H_1) $\forall t$, $f(t, 0, 0) = f(t, 1, 1) = 0$ (1);

(H_2) $\forall (t, u) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, $v \to f(t, u, v)$ est monotone (croissante);

(H_3) Pour chaque borné B de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ existe une constante $\mathrm{L} > 0$ telle que $\forall (t, v) \in \mathrm{B}$, pour tout u_1 et u_2 vérifiant $u_1 \leqq u_2$, on a $f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v) \geqq \mathrm{L}(u_1 - u_2)$.

On note $(\mathrm{P_H})$ le problème (P_0) lorsque f possède les propriétés $(\mathrm{H}_i)_{i=1,2,3}$. Sous ces hypothèses on a les résultats suivants (2) :

(α) *soient* x_0 *et* $\tilde{x}_0$ *dans* $C_+^0([-\omega, 0])$. *Si* $x_0(t) \leqq \tilde{x}_0(t)$, $\forall t \in [-\omega, 0]$, *alors* $x(t, x_0) \leqq x(t, \tilde{x}_0)$, $\forall t \in [-\omega, +\infty[$. *Par suite* $x(t) \geqq 0$, $\forall t \geqq -\omega$;

(β) *s'il existe un intervalle* $[h, h+\omega]$, $h \geqq -\omega$ *sur lequel* $x(t) \geqq 1$ (*resp.* $\leqq 1$), *alors* $\forall t \geqq h$ *on a* $x(t) \geqq 1$ (*resp.* $\leqq 1$).

DÉFINITION. NOTATION. — On appelle fonction oscillant autour de 1 toute fonction non identique à 1 et telle que $\forall t$, $\exists t'$, $t' > t$, $x(t') = 1$.

On notera : solution O_λ (resp. solution PO_λ) une solution oscillant autour de λ (resp. solution périodique oscillant autour de λ).

2. RÉSULTAT DE NON-EXISTENCE. — On supposera, par commodité, l'existence de fonctions auxiliaires $\mathrm{P} : (t, u) \to \mathrm{P}(t, u)$ et $\mathrm{Q} : (t, v) \to \mathrm{Q}(t, v)$ telles que

$$f(t, u, v) \geqq \mathrm{P}(t, u) + \mathrm{Q}(t, v).$$

LEMME. — *Soit x, une solution* O_1 *de* (P_H)*; alors, il existe une suite* $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de valeurs de t vérifiant :*

(1) *La suite est croissante et tend vers* $+\infty$*;*

(2) $\forall\, n,\ t_{n+1} \in \,]t_n, t_n+\omega]$*;*

(3) $\forall\, n,\ x(t_n) = 1$*;*

(4) $\forall$ K *compact de* $[-\omega, +\infty[$, *il existe n tel que* $\bigcup_{m \leqq n} [t_m, t_m+\omega] \supset \mathrm{K}$.

THÉORÈME. — *Soit a une constante réelle positive et g une fonction de* $\mathbf{R}^+$ *dans* $\mathbf{R}^+$ *vérifiant :*

(1) *g dérivable;*

(2) $0 \leqq g'(c) < 1/1-e^{-a\omega}$ *pour* $0 \leqq c \leqq 1$*;*

(3) $g(c) \geqq 1$ *pour* $c > 1$, $g(1) = 1$.

Si $\mathrm{P}(t, u) \geqq -au$ *et* $\mathrm{Q}(t, v) \geqq ag(v)$ *le problème* (P_H) *n'a pas de solution* PO_1.

Les hypothèses (1) et (2) peuvent être affaiblies en g croissante continue à gauche et telle que 1 soit la plus petite racine de l'équation en l : $e^{-a\omega}+(1-e^{-a\omega})\, g(l)-l = 0$.

COROLLAIRES. — (1) *Si a est une constante réelle positive telle que* $\mathrm{P}(t, u) \leqq -au$ *et* $\mathrm{Q}(t, v) \geqq av$, (P_H) *n'a pas de solution* PO_1.

(2) *Si a est une constante réelle positive telle que* $\mathrm{P}(t, u) \geqq -au$ *et* $\mathrm{Q}(t, v) \geqq av^{\alpha}$, $\alpha > 1$, *et si* $\omega \leqq (1/a)\operatorname{Log}(\alpha/\alpha-1)$, (P_H) *n'a pas de solution* PO_1.

On peut donc affirmer par exemple que les équations suivantes n'ont pas de solution PO_1.

$$x'(t) = (\operatorname{Log} 2)(-x(t)+x^2(t-1));$$

$$x'(t) = -\sin(ax(t))+\sin(a).x(t-\omega), \qquad \sin a > 0;$$

$$x'(t) = -x(t)+x(t-\omega)+\beta\sin(\pi\, x(t-\omega)), \qquad |\beta| < \min\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1/\pi}{e^{\omega}-1}\right).$$

On ne peut cependant pas espérer un résultat analogue pour les solutions O_1 [*cf.* (4)].

Conséquences. — Soit a une constante réelle positive et g une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant :

(1) g croissante, continue à gauche sur $[0,1]$;

(2) $g(1) = 1$, $g(t) \geqq 1$ pour $t \in [1, +\infty[$.

Si $\mathrm{P}(t, u) \geqq -au$ et $\mathrm{Q}(t, v) \geqq ag(v)$, toute solution O_1 de (P_H) est minorée par la plus petite racine l_0 de l'équation $l = e^{-a\omega}+(1-e^{-a\omega})\, g(l)$. Si $l_0 = 1$ toutes les solutions O_1 de (P_H) convergent nécessairement à l'infini vers 1.

3. CAS LIMITE. LINÉARISATION. — Les équations de la forme $x'(t) = -ax(t)+ag(x(t-\omega))$ apparaissent comme une situation limite. Plus particulièrement, le cas (2) où $g(x(t-\omega)) = x^{\alpha}(t-\omega)$ est un problème (P_H) qui, pour $\alpha > 1$, entre dans le cadre précédent, et par suite n'admet pas de solution PO_1 si $\omega \leqq (1/a)\operatorname{Log}[(\alpha/(\alpha-1)]$.

En linéarisant l'équation et en utilisant une assertion de Myskys (5), on est conduit à un résultat semblable de non-existence avec cependant une condition en ω, *a priori* très différente. On montre en effet :

CONDITION NÉCESSAIRE 1. — *Si l'équation* $y'(t) = -ay(t) + ay^{\alpha}(t-\omega)$ *admet une solution* PO_1 *: x, nécessairement l'équation*

$$u'(t) = h(t)(-u(t)+\alpha\, u(t-\omega)), \qquad \text{où} \quad h(t) = a\,\frac{x^{\alpha}(t-\omega)}{x(t)}$$

admet une solution PO_0.

LEMME. — *Soit h une fonction périodique de période* T, *strictement positive et continue de* **R** *dans* $\mathbf{R}^+$. *Soit* H *définie par* $H(t) = \int_0^t h(s)\,ds$. *Soit* U *une fonction périodique de période* T, *de* **R** *dans* **R**. *Soient r et* V *définies sur* **R** *par :* $(r \circ H)(t) = H(t) - H(t-\omega)$ *et* $U = V \circ H$. *Alors :*

(*a*) *r est bornée;*

(*b*) V *est périodique de période* H (T).

CONDITION NÉCESSAIRE 2. — *Si l'équation* $u'(t) = h(t)(-u(t) + \alpha u(t-\omega))$, *ou h est une fonction périodique, strictement positive continue de* **R** *dans* $\mathbf{R}^+$, *admet une solution* PO_0 *:* U, *alors nécessairement l'équation* $w'(t) = \alpha e^{r(t)} w(t - r(t))$ *admet pour solution* O_0 *la fonction* W *définie par :* $W(t) = e^t V(t)$*; r et* V *étant les fonctions construites dans le lemme précédent.*

D'autre part suivant une conjecture de Myskys [5] rappelée par Lillo [6] si $\Delta = \max(\alpha e^{r(t)}).\max(r(t)) \leqq (11/4) + \text{Log}\, 2$, toutes les solutions oscillantes de l'équation $w'(t) = \alpha e^{r(t)} w(t - r(t))$ seraient bornées. De cette conjecture on déduit sans difficulté l'assertion suivante :

Si

$$\omega e^{3a\omega} \leqq \frac{1}{a} \cdot \frac{c}{\alpha} \qquad \textit{avec} \quad c = \frac{11/4 + \text{Log}\, 2}{3}$$

(P_H) *n'admet pas de solution* PO_1.

On remarque que la condition $\omega e^{3a\omega} \leqq (1/a).(c/\alpha)$ impose à l'évidence $\omega \leqq (1/a).(c/\alpha)$, il est facile de comparer, suivant les valeurs de α, cette condition avec la condition $\omega \leqq (1/a)\,\text{Log}(\alpha/\alpha - 1)$. On constate, qu'à l'exception d'un domaine comprenant des valeurs de α comprises entre 1 et 25,89 où $\omega \leqq (1/a)\,\text{Log}(\alpha/\alpha - 1)$ est bien plus fine, les deux conditions sont pratiquement équivalentes. On pourra trouver les démonstrations et les résultats numériques dans [7].

(*) Séance du 15 novembre 1976.

(1) Ces conditions expriment que 0 et 1 sont solutions triviales du problème. Prendre 1 ou K constante positive quelconque revient au même. Nous appelons cette solution constante point d'équilibre.

(2) SÉGUIER, *Comportement des solutions d'équations différentielles à argument retardé* (*Thèse* 3e *cycle*, Pau, 1975), *Comptes rendus*, 281, série A, 1975, p. 843.

(3) Les conditions prises excluent toute solution qui deviendrait identique à 1 au bout d'un certain temps.

(4) BELLMAN-COOKE, *Differential Difference Equations*, Acad. Press, New York, London, 1963.

(5) MYSKYS, *Linear Diff. Equat. with Retarded Arguments*, Deutscher Verlag Der Wissenschaften. Berlin 1953.

(6) LILLO, *J. Diff. Équ.*, 6, 1969.

(7) ARINO et SÉGUIER, *Caractérisation par des méthodes de monotonie et de linéarisation de condition suffisantes de non existence*, Publications mathématiques de Pau, 1976.

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Université de Pau,
B.P. n° 290,
64016 *Pau.*