ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Solutions oscillantes d'équations différentielles autonomes à retard.* Note (*) de **Ovide Arino** et **Pierre Seguier,** présentée par M. Gustave Choquet.

Cette Note présente des résultats établissant l'existence et précisant le comportement de solutions oscillant autour d'un point stationnaire éjectif pour des équations à retard autonomes possédant certaines propriétés de monotonie et de continuité. Une hypothèse essentielle est que le point d'équilibre soit un point selle.

This paper shows some results proving the existence, and specifying the behavior, of solutions oscillating near a stationary point for some equations of the type $x'(t)=L(x_t)+N(x_t)$ which have certain properties of monotony and continuity. An essential hypothesis is that the equilibrium point is a saddle-point.

En ce qui concerne les notations de la Note, notations coutumières dans les problèmes d'équations différentielles fonctionnelles, on pourra se reporter au livre de J.K. Hale ([3]).

Dans ce qui suit : C désigne l'espace des fonctions continues définies sur $[-\omega, 0]\subset \mathbf{R}, \omega>0$, et à valeurs réelles. On considère les équations autonomes (E) :

$$\begin{cases} x'(t)=f(x(t), x(t-\omega)), & t\geqq 0, \\ x(t)=\varphi(t), & t\in[-\omega, 0], \end{cases}$$

sous la forme

$$x'(t)=L(x_t)+N(x_t), \qquad t\in[0,$$

où :

(*a*) Pour tout t fixé dans $[0, +\infty[$, $x_t\in C$ est définie par

$$\forall\theta\in[-\omega, 0], \quad x_t(\theta)=x(t+\theta);$$

(*b*) L est une mesure de Radon (de signe quelconque et réelle) portée par $[-\omega, 0]$;

(*c*) N non linéaire de C dans **R** vérifie : il existe μ application continue non décroissante de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, avec $\mu(0)=0$, telle que :

$$|N(\varphi_1)-N(\varphi_2)|\leqq\mu(\delta)|\varphi_1-\varphi_2|, \qquad \forall\varphi_1, \quad \varphi_2\in B_C(0, \delta),$$

où $B_C(0, \delta)$ est la boule de centre 0 et de rayon δ dans C.

Rappels. — On appelle solution toute fonction continue définie sur $[-\omega, +\infty[$ vérifiant le système (E). On admet ici [*cf.* ([3]), ([4]), ([7])] que pour chaque donnée initiale $\varphi\in C$, l'équation possède une solution et une seule que nous notons $x(., \varphi)$; les fonctions x_t de C qui lui sont associées étant notées $x_t(., \varphi)$, en particulier $x_0(., \varphi)=\varphi$.

Définitions :

D_1 *Fonction oscillant autour de* 0 *:* On appelle ainsi toute fonction non identique à 0 et telle que $\forall t, \exists t', t'>t$ avec $x(t')=0$ ([5]).

D_2 *Domaine de pseudo-stabilité :* On désigne par P la partie de C formée des données initiales qui engendrent des solutions oscillant autour de 0, et par P_0 le sous-ensemble de P formé par celles qui engendrent des solutions tendant vers zéro à l'infini.

D_3 *Décomposition de* C *:* On désigne, suivant ([3]), par U (resp. : S) la partie de C formée des données correspondant aux solutions bornées pour $t\leqq 0$ (resp. : $t\geqq 0$) et tendant vers zéro à $-\infty$ (resp. : $+\infty$) de l'équation $x'(t)=L(x_t)$. Cet espace U est l'espace propre généralisé associé aux racines à partie réelle strictement positive de $D(\lambda)=\lambda-L(e^{\lambda \cdot})=0$ [1]. Nous désignons par σ_+, σ_0, σ_- l'ensemble des racines à partie réelle >0, $=0$, <0 de cette équation $D(\lambda)=0$.

D_4 *Solution oscillant autour de* 0 *et non amortie* : Une solution oscillant autour de 0 est non amortie si $\exists\,\varepsilon>0$ tel que $\forall\, t$, $\exists\, t'>t$ avec $|x(t')|>\varepsilon$.

D_5 *Solution oscillant autour de* 0 *non amortie et stricte* : Une solution oscillant autour de 0 est non amortie et stricte si $\exists\,\varepsilon>0$ tel que $\forall\, t$ on ait à la fois :

(*a*) $\exists\, t'$, $t'>t$ et $x(t')>\varepsilon$;

(*b*) $\exists\, t''$, $t''>t$ et $x(t'')<-\varepsilon$.

HYPOTHÈSES :

H_1 *Semi-éjectivité* [2] : Il existe au moins un voisinage de 0 dans C : $V_\eta=\{\varphi\in C ; |\varphi|<\eta\}$ avec $0<\eta<+\infty$ tel que pour toute fonction $\varphi\in V_\eta$ les propriétés suivantes soient équivalentes :

(1) $\exists\, t_0\geqq 0;\quad x_{t_0}(.,\varphi)\geqq 0,\ \ x_{t_0}(.,\varphi)\neq 0$ (resp. $x_{t_0}(.,\varphi)\leqq 0,\ x_{t_0}(.,\varphi)\neq 0$);

(2) $\exists\, t'<+\infty,\ \ \forall\, t>t';\quad x_t(.,\varphi)>\eta$ (resp. : $x_t(.,\varphi)<-\eta$).

H_2 *Éjectivité* [2] : Si $\varphi\geqq 0$, $\varphi\neq 0$ (resp. : $\varphi\leqq 0$, $\varphi\neq 0$) il existe $\alpha>0$ et $t_\alpha<+\infty$ tels que $\forall\, t\geqq t_\alpha$, $x_t(.,\varphi)>\alpha$ (resp. : $\forall\, t\geqq t_\alpha$, $x_t(.,\varphi)<-\alpha$).

H_3 *Monotonie* : S désignant l'ensemble des solutions, l'application bijective de C dans S qui à toute donnée initiale φ fait correspondre la solution $x(.,\varphi)$ qu'elle engendre est monotone croissante [[5], [7]].

H_4 *Propriété d'ordre* : Si pour deux fonctions φ et Ψ dans P on a $\varphi\geqq\Psi$ et $\varphi\neq\Psi$, alors il existe $\tau<+\infty$ tel que $\forall\, t>\tau$ $x_t(.,\varphi)>x_t(.,\Psi)$.

Nous avons alors les résultats suivants d'existence et de comportement sur les solutions oscillantes de (E).

THÉORÈME 1. — *Les équations* (E) *vérifiant* H_1, *admettent une infinité de solutions oscillant autour de* 0.

RAPPEL : THÉORÈME 2 Hale [3]. — *Si* $\sigma_0=\emptyset$ *et* $\sigma_+\neq\emptyset$, *on a* : 1° $C=U\oplus S$; 2° *il existe* $\delta>0$, $\delta'>0$, Σ^+ *sous-variété lipschitzienne de* C, *contenant* 0 *et tangente à* S *en* 0 *tels que* ($\varphi\in C$, $|\pi_S(\varphi)|<\delta'$, $|x_t(.,\varphi)|<\delta$ *pour* $t\geqq 0)\Rightarrow\varphi\in\Sigma^+$, *où* π_S *désigne l'opérateur de projection de* C *sur* S *parallèlement à* U; 3° π_S *réalise un homéomorphisme entre* Σ^+ *et* S; 4° *il existe des constantes* $M>0$ *et* $\gamma>0$ *telles que* : $|x_t(.,\varphi)|\leqq M\,e^{-\gamma t}|\varphi|$ *pour* $t\geqq 0$ *et* $\varphi\in\Sigma^+$. (*De la même manière il existe* Σ^- *tangente à* U *avec des propriétés analogues.*)

Remarque. — Sous les conditions d'application du théorème de Hale, l'hypothèse H_2 permet à l'évidence d'obtenir aussi le résultat du théorème 1. Le théorème 1 présente cependant la particularité d'être constructif [6].

LEMME 1. — *Si une solution bornée oscillant autour de* 0 *de* (E) *ne tend pas vers zéro à l'infini, alors sous l'hypothèse* H_2 *elle est nécessairement non amortie et stricte.*

LEMME 2. — *Si l'équation* (E) *admet deux solutions oscillant autour de* 0 *bornées correspondant respectivement à des données* φ *et* Ψ *vérifiant* $\varphi\geqq\Psi$, $\varphi\neq\Psi$, *alors sous les hypothèses* H_2, H_3 *et* H_4 *les solutions* $x(.,\chi)$ *avec* $\varphi\geqq\chi\geqq\Psi$ *sont oscillantes autour de* 0 *et non amorties.*

THÉORÈME 3. — *Sous les hypothèses* H_2, H_3, H_4, *si* $\sigma_0=\emptyset$ *et* Card $\sigma_+=1$, *il existe un voisinage de* 0 *dans* C *tel que toutes les solutions oscillant autour de* 0 *bornées correspondant à des données initiales appartenant à ce voisinage, tendent vers zéro à l'infini.*

Indications sur la démonstration. — Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage de 0 dans C tel que les φ appartenant à ce voisinage donnant des solutions oscillant autour de 0 appartiennent aussi à Σ^+. On choisit $\tilde{\varphi}<0$ dans C, avec $\tilde{\varphi}\in S$. Par l'intermédiaire du théorème des fonctions implicites on montre qu'il existe un voisinage de 0, W, tel que toute demi-droite issue de $\tilde{\varphi}$ et passant par un point de W coupe Σ^+ et tel que $\forall\,\varphi\in W\ \varphi>\tilde{\varphi}$. En utilisant alors le lemme 3 on obtient le résultat.

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses* H_2, H_3, H_4, *si* $\sigma_0=\emptyset$ *et* Card $\sigma_+\geqq 2$, *si l'application* $T(.) : P_0\to C^0(\mathbf{R}^+, C)$ *définie par :* $T(.)\,\varphi=x_.(., \varphi)$ *est continue en* 0, *alors l'équation* (E) *possède des solutions oscillant autour de* 0 *non amorties.*

Indications sur la démonstration. — On raisonne par l'absurde en supposant que toutes les solutions oscillantes sont amorties. La continuité de $T(.)$ en 0 assure qu'au voisinage de 0 les données de solutions oscillantes sont sur Σ^+; c'est-à-dire constituent une sous-variété de codimension au moins égale à 2. Nous montrons contradictoirement que, du fait de la monotonie l'ensemble des données de solutions oscillantes est une sous-variété de codimension 1.

THÉORÈME 5. — *Sous l'hypothèse* H_2, *si l'équation n'admet comme solution oscillant autour de* 0 *que des solutions amorties en* $+\infty$, *si* $\sigma_0=\emptyset$ *et* Card $\sigma_+\neq\emptyset$, *alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° $T(.)$ *est continue en* 0;

2° *il n'existe pas de solution oscillant autour de* 0 *prolongeable à* **R** *tout entier et tendant vers zéro en* $+\infty$ *et* $-\infty$.

On pourra trouver le détail des démonstrations ainsi que des résultats complémentaires dans ([5]) et ([6]), notamment une étude approfondie de la continuité de $T(.)$ à l'aide d'exemples, et un développement sur la détermination numérique des solutions oscillantes.

Le dernier théorème ouvre une question qui ne semble pas avoir été beaucoup étudiée jusqu'à maintenant; on peut signaler toutefois un article ([8]) où l'auteur établit par une méthode de bifurcation l'existence de solutions définies sur **R**, tendant vers zéro à $\pm\infty$, d'une équation différentielle fonctionnelle.

(*) Séance du 18 septembre 1978.

([1]) L'équation caractéristique $D(\lambda)=0$ est souvent présentée sous la forme $\det\left(\lambda I-\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\theta}\,d\eta(\theta)\right)=0$ (en dimension n), avec $L(\varphi)=\int_{-\infty}^{0}\varphi(\theta)\,d\eta(\theta)$, *voir* ([3]).

([2]) Nous représentons l'instabilité de la solution triviale zéro, à l'aide de ces hypothèses qui expriment son action « d'éjectivité sélective » sur les autres solutions.

([3]) J. K. HALE, *Theory of Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences*, 3, Springer-Verlag, New York, 1971 ou 1976.

([4]) R. B. GRAFTON, *J. of Diff. Equat.*, 6, 1969, p. 87.

([5]) O. ARINO et P. SEGUIER, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 145 et *Numer. Math.* (à paraître).

([6]) O. ARINO et P. SEGUIER, *Existence et comportement de solutions oscillantes autour de points stationnaires instables* (à paraître). *Un procédé de détermination numérique de solutions oscillantes pour des équations à retard autonomes* (*Col. Anal. Num.*, Giens, 1978).

([7]) P. SEGUIER, *Comportement de solutions d'équations différentielles à argument retardé* (*Thèse de 3e cycle*, Université de Pau, 1975).

([8]) Y. DEMAY, *Comptes rendus*, 285, série A, 1977, p. 769.

Université de Pau, Département de Mathématiques, 64000 *Pau.*