C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288 (28 mai 1979)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Comportement des solutions de* $x'(t)+f(t, x(t))=f((t-1), x(t-1))$.

Note (*) de **Ovide Arino** et **Pierre Séguier**, présentée par Gustave Choquet.

Dans [1] C. Jehu établit le résultat suivant : f et h étant des fonctions 1-périodiques en t, h étant d'intégrale nulle sur $[-1, 0]$, ces fonctions étant de plus continues, f étant strictement croissante par rapport à la deuxième variable, les solutions de $x'(t)=f((t-1), x(t-1))-f(t, x(t))+h(t)$ sont à l'infini asymptotes à une solution périodique. Nous nous proposons, ici, de préciser les comportements en enlevant le caractère 1-périodique de f et en conservant simplement la propriété d'existence d'intégrale première. Nous montrons que toutes les solutions ayant même intégrale première ont même comportement. On pourra comparer aussi avec un résultat de Kaplan, Sorg et Yorke [2] sur des équations de même nature mais autonomes.

We study the solutions of the equation $x'(t)=f((t-1), x(t-1))-f(t, x(t))$, $\left(\textit{which has an invariant } x(t)+\int_{t-1}^{t} f(s, x(s))\,ds\right)$. *We show successively that the solutions are bounded, that solutions with zero invariant go to zéro at infinity, as do solutions oscillating near* 0, *and that the behaviour at infinity depends only on the invariant.*

On considère le problème suivant :

$$
(\mathrm{E})\quad \begin{cases} & x'(t)=f(t-1, x(t-1))-f(t, x(t)), \\ \text{avec} & \\ (1) & f(t, 0)=0, \qquad \forall t, \\ (2) & (t, u) \to f(t, u) \quad \text{continue}, \\ (3) & u \to f(t, u) \quad \text{croissante pour } t \text{ fixé}. \end{cases}
$$

Les données initiales sont dans $C^0([-1, 0], \mathbb{R})$. Une solution x de l'équation sera aussi notée $x(.)$ ou $x(., \varphi)$ selon les besoins afin d'éviter toute confusion possible (φ désigne la donnée initiale). Toute solution de (E) appartient à $C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, (*cf.* [3], [4]).

1. Définitions. Notations. — On remarque que l'équation conduit immédiatement à : $x(t)+\int_{t-1}^{t} f(s, x(s))\,ds=\mathrm{Cte}$. On appellera le premier membre de cette égalité « intégrale première ».

Sous certaines conditions on peut vérifier que toutes les solutions ayant même intégrale première ont même comportement, ce qui signifie de façon équivalente que la différence de deux de ces solutions, solution elle même d'une équation de même nature que (E), et d'intégrale première nulle, tend vers zéro à l'infini. On est donc amené à étudier le comportement à l'infini des solutions d'intégrale première nulle, ce qui conduit à examiner le comportement des solutions oscillant autour de 0 (*voir* définition ci-dessous). On constatera que ces deux familles de solutions peuvent coïncider. L'étude des solutions oscillant autour de 0 permet donc l'approche et la détermination globale des comportements des solutions de (E).

Définition. — Par fonction oscillant autour de 0, on entend une fonction vérifiant : $\forall t$, $\exists t'$, $t' \geqq t$ avec $x(t')=0$.

2. Caractère borné des solutions.

Proposition. — *Toutes les solutions de* (E) *sont bornées.*

La démonstration s'obtient simplement à partir des deux lemmes suivants :

Lemme 2.1. — *Soient deux données initiales* φ *et* Ψ *dans* $C^0([-1, 0], \mathbb{R})$. *Alors si* $\varphi \leqq \Psi$ *et* $\varphi \neq \Psi$ *on a* $x(., \varphi) \leqq x(., \Psi)$.

LEMME 2.2. — *Si x est une solution non négative (resp. non positive) x est majorée (resp. minorée).*

3. PROPRIÉTÉS DE COMPORTEMENT.

PROPOSITION 3.1. — *Supposons que f ait la propriété suivante : pour chaque solution x de* (E) *oscillant autour de* 0 :

$$\limsup_{t \to +\infty} x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

Alors : toute solution oscillant autour de 0 *tend vers zéro, à l'infini.*

Parmi les classes de fonction f vérifiant les propriétés de la proposition 3.1 on distingue essentiellement celles qui correspondent à des conditions de type Lipschitz ou des conditions de type strictement monotone en u uniformément par rapport à t. De façon plus précise, ce sont les fonctions f correspondant aux hypothèses :

4. $\forall$ B borné de $\mathbb{R}$, $\exists$ A $\in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall t, u, v, \quad t \geqq \mathrm{A}, \qquad u, v \in \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad f(t, u) - f(t, v) \,|\leqq k\,|\,u - v\,|.$$

5. $\forall$ B borné de $\mathbb{R}$, $\exists$ A $\in \mathbb{R}$, k et h fonctions positives avec $h(w) \neq 0$ si $w \neq 0$ et $k(w) \to 0$, $w \to 0$, tels que

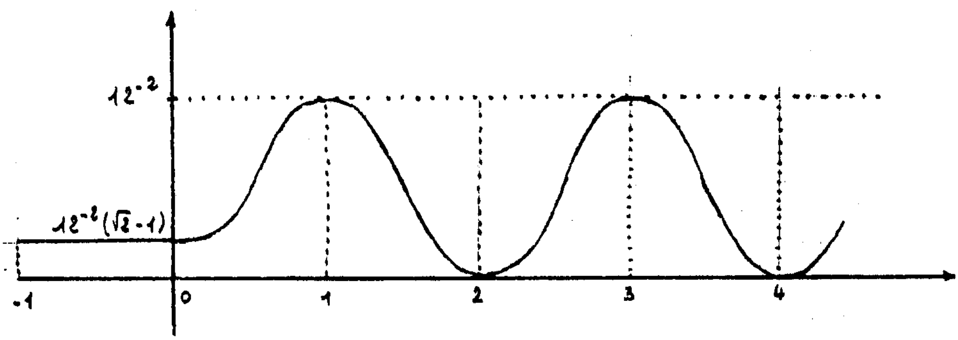
$$\forall t, u, v, \quad t \geqq \mathrm{A}, \qquad u, v \in \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad h(u-v) \leqq |\, f(t, u) - f(t, v)\,| \leqq k(u-v).$$

Notons que pour avoir la proposition 3.1, il suffit que f vérifie l'une de ces hypothèses avec $u = 0$.

Remarque 3.2. — L'exemple suivant montre que si ce type d'hypothèse n'est pas rempli, la conclusion de la proposition 3.1 peut, bien entendu, être en défaut

$$f(t, u) = \begin{cases} (t - 2k + 1)(2k - t)\sqrt{u} & \text{pour} \quad t \in [2k-1, 2k] \quad \text{et} \quad u \geqq 0, \\ 0 & \text{pour} \quad t \in [2k, 2k+1] \quad \text{ou} \quad u \leqq 0. \end{cases}$$

L'équation (E) associée (on vérifie sans difficulté les hypothèses 1, 2, 3) admet des solutions 2-périodiques oscillant autour de 0 (au sens de la définition du paragraphe 1).



L'hypothèse 6 que nous indiquons maintenant représente un affaiblissement de la stricte monotonie par rapport à l'hypothèse 5, compensé par un renforcement du caractère uniforme du comportement en t.

6. (*a*) $\forall \mathrm{B}$ borné de $\mathbb{R}$, $r<0$, $\exists \mathrm{A}\in\mathbb{R}$, h fonction positive, avec $h(w)\neq 0$ si $w\neq 0$, tels que

$$\forall \mathrm{I} \text{ intervalle}, \qquad \mathrm{I}\subset[\mathrm{A}, +\infty[, \qquad |\mathrm{I}|\geqq r;$$

$$\forall (u, v)\in \mathrm{B}\times\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \left|\int_{\mathrm{I}} (f(t, u)-f(t, v))\,dt\right| \geqq h(u-v);$$

(*b*) De plus, pour toute suite $(t_n)\to+\infty$, il existe une sous suite (t_{n_k}) telle que : $f(t+t_{n_k}, u)$ converge uniformément sur les bornés de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$.

PROPOSITION 3.3. — *Sous l'hypothèse* 6 *toute solution de* (E) *d'intégrale première nulle tend vers zéro à l'infini.*

Notons encore que pour la proposition 3.3, il suffit de vérifier l'hypothèse 6 sur les couples $(u, v)\in \mathrm{B}\times\mathrm{B}$, avec $u=0$.

THÉORÈME 3.4. — *Sous l'une quelconque des hypothèses* 4, 5 *ou* 6, *le comportement à l'infini des solutions de* (E) *ne dépend que de la valeur de l'intégrale première, c'est-à-dire, si* x_1 *et* x_2 *sont des solutions de* (E) *ayant même intégrale première, alors* x_2-x_1 *tend vers zéro à l'infini.*

4. APPLICATION. — Si l'on suppose $f(t, u)$ périodique de période T en t, monotone en u, de classe C^1 en (t, u), alors une application globale du théorème des fonctions inverses à l'opérateur $\mathrm{Id}+\mathrm{F}$, où $(\mathrm{F}\,\varphi)(t)=\int_{t-1}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds$, défini sur l'espace des fonctions continues T-périodiques, permet de montrer l'existence et l'unicité pour chaque valeur α de l'intégrale première d'une solution T-périodique de (E). On en déduit le résultat suivant :

COROLLAIRE 4.1. — *Si f est* T-*périodique et : soit strictement monotone, soit lipschitzienne, alors les solutions de* (E) *sont asymptotiquement* T-*périodiques.*

Remarques 4.2. — Le corollaire 4.1 est une extension sur les périodes du résultat de C. Jehu, valable pour $\mathrm{T}=1$. Ce cas est d'ailleurs bien particulier puisque nous avons vérifié par la méthode de [1] que la conclusion du corollaire est assurée sous les seules hypothèses 1, 2, 3.

On pourra trouver le détail des démonstrations dans [5].

Maurice Gaultier nous a apporté un soutien précieux au cours de ce travail.

(*) Remise le 21 mai 1979.

[1] C. JEHU, *Comportement asymptotique des solutions de l'équation*

$$x'(t)=f(t, x(t-1))-f(t, x(t))+h(t) \quad \text{(à paraître)}.$$

[2] KAPLAN, SORG et YORKE, *Non Linear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 3, n° 1, 1979.

[3] O. ARINO et P. SÉGUIER, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 145.

[4] O. ARINO et P. SÉGUIER, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 611.

[5] O. ARINO et P. SÉGUIER, *Certains types de comportement pour les solutions de*

$$x'(t)=-f(t, x(t))+f(t-1, x(t-1)).$$

Publications mathématiques de Pau 1979 (à paraître).

Université de Pau, Département de Mathématiques, 64000 *Pau.*